Online Journal of Art and Design
volume 13, issue 2, April 2025
DOI: https://doi.org/10.30935/ojad/2513022

Matematiğin Büyüleyici Dünyası Altın Oran

Öznur ÖZKAN KILIÇ
Başkent Üniversitesi, İİBF, Teknoloji ve Bilgi Yönetimi Programı.
oznur@baskent.edu.tr
ORCID: 0000-0003-4209-9320

ÖZET
Altın Oran, matematik ve estetik birbirleriyle çok karmaşık bir şekilde ilişkilidir. Bu makalede, klasik sanatta, mimaride çok daha fazlasında ortaya çıkan estetik izlenimde matematiğin varlığını sergiliyoruz. İlahi oran müzikte, şiirde ve sanatın diğer formlarında bulunabilir, ancak burada odak noktamız sadece görsel olanlardır. Altın oran, doğayla ve hatta evrenin ve insan vücudunun yapısıyla olan ilişkisi nedeniyle kutsal kabul edilir. Yüzyıllar boyunca, güzelliğini görebilen büyük sanatçılar tarafından mimari şaheserlerin yapımında, tasarımlarında ve kompozisyonlarında kullanılmıştır. Mimari yapıtlarda, resimlerde ve geometrik şekillerde Altın Oran uygulamalarının güzelliğin gizemini nasıl yarattığını ortaya koymaya çalışıyoruz.
Anahtar Kelimeler: Altın oran, Fibonacci dizisi, Estetik Matematik Eğitimi

ABSTRACT
The Golden Ratio, mathematics and aesthetics are inextricably linked. This article presents an examination of the role of mathematics in the formation of aesthetic impressions, as evidenced in classical art, architecture, and other forms of visual expression. The concept of the divine proportion can be observed in a number of artistic forms, including music and poetry. However, the focus of this article is on its visual manifestations. The golden ratio is regarded as a sacred proportion due to its association with natural phenomena and even the structure of the universe and the human body. For centuries, it has been employed in the construction, design and composition of architectural masterpieces by eminent artists who were able to perceive its aesthetic appeal. This article seeks to elucidate the manner in which the Golden Ratio is employed in architectural works, paintings and geometric shapes, thereby engendering a sense of aesthetic mystery.
Keywords: Golden ratio, Fibonacci sequence, Aesthetics, Maths Education

1-GİRİŞ
Evren karmaşık fakat mükemmel bir sisteme sahiptir. Her şeyin birbiriyle ilişkisi olmasına rağmen bu mükemmelliğin bozulmaması veya aksamaması eskiden beri insanoğlunun dikkatini çekmiştir. Acaba bu mükemmelliği sağlayan nedir? Sorusuna en uygun cevap ise tabi ki matematiğin evrende var olmasıdır. Böylece evrende olan her şey anlaşılabilir, ilişkilendirilebilir ve istenilen şekilde yönlendirilebilir. Matematik, evrenin anahtarıdır aslında. O halde evrende var alan her şeyde belli bir düzen ve oran aramak mümkündür. Bu düşünce sayesinde "Altın Oran" denilen evrenin sırrına ancak ulaşılabilir. Altın oran'a "estetiğin, güzelliğin oranı" da denilebilir.

2-MATEMATİKTE ALTIN ORAN ve FİBONACCİ İLİŞKİSİ
Altın oran, benzersiz bir matematiksel ilişkidir. Φ (büyük phi) veya φ (küçük phi) sayısı altın oran olarak bilinir. Bu çalışma da altın oran φ ile gösterilecektir. Altın oranın standart gösterimi olan phi harfleri 20. Yüzyılın başlarında matematikçi Mark Barr tarafından ünlü Yunan heykeltıraş Phidias'ın adındaki ilk üç Yunan harfinden türetilmiştir. Matematikçi ve bilimci olan Martin Gardner'e göre Barr'ın, Phidias'ın "heykellerinde altın oranı sık sık kullandığına inanıldığı" için seçildiğini belirtmesine rağmen Barr bunu inkar etmiş ve aksine yazdığı " Parameters of beauty " adlı makalesinde

Phidias'ın altın oranı kullandığından şüphe ettiğini de belirtmiştir (Vikipedi, Altın Oran).

Altın Oran matematiksel olarak şu şekilde tanımlanır: Bölünen bir doğru parçası için büyük parçasının, küçük parçaya oranı; bütünün büyük parçaya oranına eşittir. Bunu denklem ile ifade edelim:

İki pozitif x ve y sayısı için $x > y$ koşulunu sağlasın. O halde altın oran, bu sayıların toplamı ve büyük olan arasındaki oran ile büyük olan ve küçük olan arasındaki oranla aynı olması şeklinde ifade edilibilir. Yani, altın oran

$$\varphi = \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklem

$$\varphi = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

ifadesine eşittir. Bu denklem φ ile genişletilirse φ^2=φ +1 eşitliği yani buna denk olarak φ^2- φ -1=0 ikinci dereceden denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri

$$\varphi_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \pm\, 1.618033$$

' dir.
φ pozitif büyüklükler arasındaki oran olduğundan $\varphi = 1.618033\cdots$ olmalıdır.

İşte bu $\varphi = 1.618033\cdots$ irrasyonel sayısı "Altın oran" olarak adlandırılır.
Ayrıca φ aşağıdaki seri ile de ifade edilebilir (Choi, Atena, & Tekalign, 2023).

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\vdots}}}}$$
$$\vdots$$

Bu sonsuz toplam özyinemeli olduğundan

$$\varphi = 1 + \frac{1}{\varphi}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, $\varphi^0 = 1$ ve $\varphi^1 = 1.618033$ olmak üzere φ'nin herhangi bir kuvveti

$$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2} \qquad (n \geq 2,\ n \in \mathbb{N})$$

şeklinde önceki iki kuvvetin toplamına eşit olarak ifade edilebilir.

$\varphi^n = \varphi^{n-1} + \varphi^{n-2}$ denkleminde φ^2=φ +1 eşitliği kullanılırsa altın oranın kuvvetleri için bir örüntüye ulaşılabilir:

$$\varphi^3 = \varphi\varphi^2 = \varphi(\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = (\varphi + 1) + \varphi = 2\varphi + 1$$
$$\varphi^4 = \varphi^2\varphi^2 = (\varphi + 1)(\varphi + 1) = \varphi 2 + 2\varphi + 1 = (\varphi + 1) + 2\varphi + 1 = 3\varphi + 2$$
$$\varphi^5 = \varphi^3\varphi^2 = (2\varphi + 1)(\varphi + 1) = 2\varphi^2 + 3\varphi + 1 = 2(\varphi + 1) + 3\varphi + 1 = 5\varphi + 3$$
$$\varphi^6 = \varphi^3\varphi^3 = (2\varphi + 1)(2\varphi + 1) = 4\varphi^2 + 4\varphi + 1 = 4(\varphi + 1) + 4\varphi + 1 = 8\varphi + 5$$
$$\varphi^7 = \varphi^4\varphi^3 = (3\varphi + 2)(2\varphi + 1) = 6\varphi^2 + 7\varphi + 2 = 6(\varphi + 1) + 7\varphi + 1 = 13\varphi + 8$$
$$\vdots$$

Online Journal of Art and Design
volume 13, issue 2, April 2025
DOI: https://doi.org/10.30935/ojad/2513022

Bu örüntü $n = 2,3, \ldots$ için F_n ve F_{n-1} fibonacci sayıları olmak üzere

$$\varphi^n = F_n\, \varphi + F_{n-1}$$

şeklinde ifade edilebilir. Oluşturulan bu model veya örüntü bize altın oranın kuvvetlerini bulmada kolaylık sağlar.Örneğin; $\varphi^{10} = 55\varphi + 34$ gibi.

Ayrıca, bu özyinemeli denklem $\varphi^2 = \varphi + 1$ 'in diğer kökü için de geçerli olmalıdır. Yani, $\Upsilon = 1 - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ için $\Upsilon^n = F_n\, \Upsilon + F_{n-1}$ yazılabilir. Bu iki denklemden F_n çekilirse

$$F_n = \frac{\varphi^n - \Upsilon^n}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

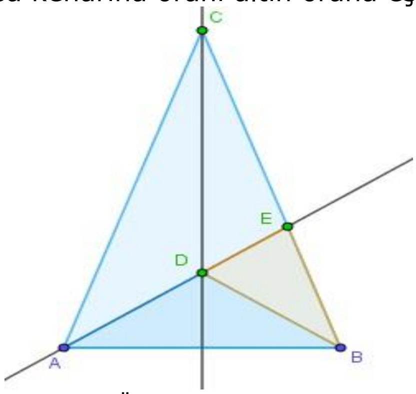
eşitliği yazılabilir. $(n = 2,3, \ldots)$ Bu formül "Binet formülü" olarak bilinir. Binet formülü sayesinde Fibonacci sayılarıyla ilgili pek çok toplam daha iyi şekilde ifade edilir (Ghorbani, 2021).

Matematikte altın oran, özellikle geometride, altın dikdörtgen, altın sarmal, altın üçgen, altın elips vb. şeklinde karşımıza çıkmaktadır (Kılıç ve Kılıç, 2017).

3- BAZI ALTIN ŞEKİLLER

Altın Üçgen

Altın üçgen, uzun kenarının kısa kenarına oranı altın orana eşit olan ikizkenar üçgenlerdir.



Resim 1: Altın Üçgen **(**Aslaner ve Bakan, 2020)

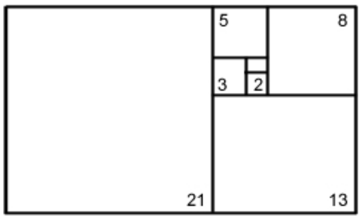
Yukarıdaki Resim 1 'de, Bir ABC altın üçgeninde B açısının açıortay doğrusunun, tabanın orta dikme doğrusu ile kesişim noktası D ve karşı kenarını kestiği nokta E olmak üzere elde edilen ABD ve BED üçgenleri de birer altın üçgendir (Aslaner ve Bakan, 2020).

Bu üçgenlerden BDE, ABC üçgeni ile benzer üçgenler olup taban açıları 72^0 ve tepe açısı 36^0 dir.

ABD altın üçgeninin ise taban açıları 36^0 ve tepe açısı 108^0dir.
A ve B noktaları "*başlangıç nesneleri*", ABC üçgeni ve E noktası "*sonuç nesneleri*" alınarak yeni bir *makro* tanımlanıp bu *makro* kullanılarak B ve E noktaları, E ve D noktaları ... ve böylece devam edilerek iç içe altın üçgenlerden oluşan bir fractal oluşturulabilir.

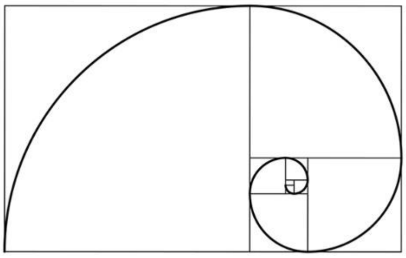
Altın Dikdörtgen ve Altın Spiral

Altın dikdörtgen, kenar uzunlukları arasında $\frac{1}{\varphi}$ oranına sahip olan dikdörtgendir. Altın dikdörtgenin en önemli özelliği, bu dikdörtgenden bir kare çıkarıldığında kalan şeklin yine bir altın dikdörtgen olmasıdır. Kalan yeni dikdörtgende benzer işlemler yapılırsa ve bu işlem sonsuza kadar devam ettirilirse aşağıdaki şekile ulaşılabilir (Resim 2):



Resim 2: Altın Üçgen *(http://en.wikipedia.org/wiki/file)*

Hatta bu oluşan şekildeki karelerin köşeleri bir eğriyle birleştirilirse "logaritmik spiral" veya "altın sarmal "denilen şekil elde edilir (Resim 3).



Resim 3: Altın Üçgen *(http://en.wikipedia.org/wiki/file)*

Burada yeri gelmişken hemen belirtelim ki altın sarmal doğa ve sanatın birçok yerinde bulunmaktadır. Denizatı kuyruğu, Mona Lisa' nın ünlü portresi buna örnek olarak gösterilebilir.

4-SANATTA ALTIN ORAN

Altın oranın sanatta önemli görülmesinin en önemli nedenlerinden biri, görsel olarak çekici kompozisyonlar yaratma iddiasıdır. Oranın bir denge ve uyum duygusu yarattığına inanılır ve genellikle doğallık veya organik güzellik hissiyle ilişkilendirilir. İnsan gözü üzerinde hoş bir etkisi olduğu söylenir ve sanatçılar ve tasarımcılar bunu görsel olarak büyüleyici, estetik açıdan hoş kompozisyonlar yaratmak için bir araç olarak kullanmışlardır.

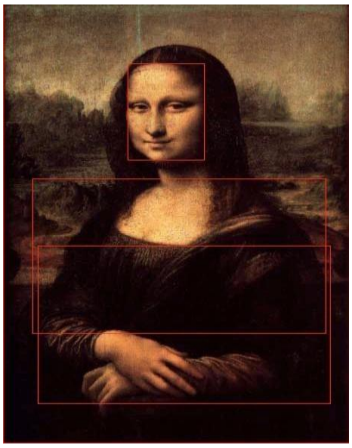
Ayrıca altın oran, ilahi oranlar veya kozmik uyum fikriyle de ilişkilendirilir. Tarih boyunca pek çok sanatçı ve filozof altın orana manevi veya metafiziksel bir anlam yüklemiş, onu ilahi veya evrensel düzenin bir temsili olarak görmüştür. Altın oranın bu mistik yönü, cazibesini daha da artırmış ve sanatçılara, eserlerine daha yüksek bir anlam veya sembolizm duygusu aşılamanın bir yolu olarak onu yaratımlarına dahil etmeleri için ilham vermiştir.

Altın oran kavramının geçmişi antik çağlara kadar uzanmaktadır ve antik Mısır, antik Yunan ve ortaçağ Avrupa'sı da dahil olmak üzere çeşitli kültür ve medeniyetlerde kullanıldığına dair kanıtlar bulunmaktadır. Eski Mısırlıların, piramidin yüksekliğinin tabanına oranının yaklaşık olarak altın orana eşit olduğu Büyük Giza Piramitlerinin yapımında altın oranı kullandıklarına inanılmaktadır. Antik Yunan'da altın oran mükemmel güzellik fikriyle ilişkilendirilmiş ve Phidias gibi ünlü Yunan mimarlar tarafından tapınak ve heykellerin tasarımında kullanılmıştır.

Sanat otoriteleri, dünya sanatının başyapıtlarını incelerken, Michelangelo (pentagram), Rafael Santi (Altın üçgen), Iva Shishkin, Konstantin Vasil'ev'in (Altın dikdörtgen) kompozisyon yapılarında altın bölüm oranının izlerini bulmuşlardır. Altın oran Da Vinci'*nin Müjde*, *Çocuklu Madonna ve Azizler*, *Mona Lisa* ve *Aziz Jerome* tablolarında da yaygındır. Eserlerinde Altın oranı kullanmasıyla ünlüdür. Utangaç gülümsemesiyle tanınan bir kadın portresi olan *Mona Lisa*, Altın dikdörtgenlerle doludur (Resim 4). *Yaşlı Bir Adam* adlı eskizde çok sayıda dikdörtgen vardır. *Vitruvius Adamı* aracılığıyla Vinci, insan bedeninin mükemmelliğini tüm ilahi orantı içinde göstermeye çalışmaktadır. Altın üçgenler ve yıldızlar (pentagramlar), Michelangelo'nun *Kutsal Aile* ve Raphael'in *Çarmıha Gerilme* tabloları da

Online Journal of Art and Design
volume 13, issue 2, April 2025
DOI: https://doi.org/10.30935/ojad/2513022

dahil olmak üzere birçok ünlü tablonun kompozisyonunda kullanılmıştır. Salvador Dali*, Son Akşam Yemeği Ayini* için çerçeve olarak Altın dikdörtgeni kullanmıştır (Resim 5)*.* Antik Yunan'daki Athena heykeli ve "Belvedere "deki Apollo heykeli Altın oranın kullanımını göstermektedir. Rönesans döneminde portrelerde, Hıristiyan Tanrı resimlerinde ve heykellerde bolca kullanılmıştır (Thapa & Thapa, 2018).



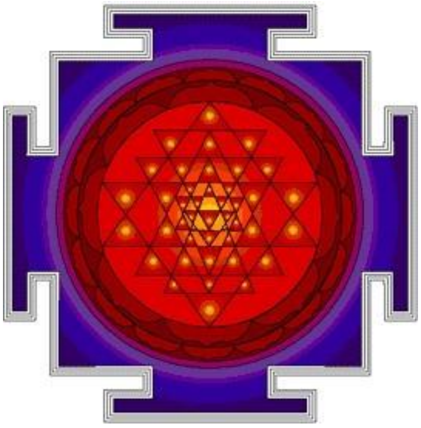
Resim 4: Mona Lisa **Resim 5**: Altın Üçgen Son Akşam Yemeği Ayini
(cuip.uchicago.edu/~dlnarain/golden/activity3.htm)

5- MİMARİDE ALTIN ORAN

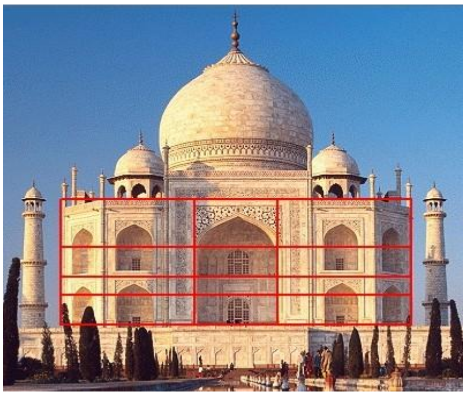
Altın oranın kullanımı çok eskiden beri mimaride de yaygındır. Tanrıça Atina'nın tapınağı olan muhteşem Parthenon, antik Yunan mimar ve heykeltıraşlarının ortak çabalarının bir sonucudur. Haklı olarak antik Yunan mimarisinin en büyük anıtı olarak kabul edilmektedir. Parthenon, mimari ve heykelsi ihtişamıyla göz kamaştıran özel bir insan eseridir ve Parthenon'un güzelliğinin ana nedeni, parçalarının Altın Oran'a dayanan zarif uyumudur. Parthenon'un bazı özellikleri (Frayling vd, 1992)'te aşağıdaki gibi açıklanmıştır:

"Binanın oranlarının analizi birçok gizli altın kesitli dikdörtgeni ortaya çıkarmıştır. Zemin planı karşılıklı iki altın dikdörtgenden oluşur ve iç oda altın orandadır; ana cephe tek bir altın dikdörtgene sığar ve cephe ile zemin planının karşılaştırılması, altın oranla ilişkilendirdiğimiz temel armonik ilişkileri ortaya çıkarır. Tüm bu bağlantılar, mekân ve form dizilimine bir düzen ve süreklilik duygusu katmaktadır".

Benzer şekilde, antik Hindistan'da meditasyon sembolü *Sri Yantra*'nın yapımında da ilahi oran kullanılmıştır (Resim 5). Sri Yantralar iç içe geçmiş 9 ikizkenar üçgenden oluşur, bunlardan 4 tanesi dişi enerji Shakti'yi temsilen yukarı bakarken, diğer 5 tanesi erkek enerji Shiva'yı temsilen aşağı bakar. Sriyantra'nın standart formu, iç içe geçmiş 9 üçgenle birlikte toplam 43 üçgenden oluşur. Şaşırtıcı, Yantra'nın üçgeninin Giza Piramidinin orantılı bir kesiti olması ve hem özel sayılar $\pi\,(3.142...)$ hem de $\phi\,(1.618...)$ oranını içermesidir. Yantra'daki üçgenin taban açısının 51^{o} civarında olduğu görülmektedir ki bu değer Büyük Giza Piramidi'nin tabanına atfedilen değerle aynıdır (Thapa & Thapa, 2018).



Resim 5. Hint Meditasyon Sembolü Sri Yantra
(commons.wikimedia.org/wiki/SriYantra_construct.svg)



Resim 6. Tac Mahal'in Ana Binası
(google.com/site/funwithfibonacci/taj-mahal)

Benzer şekilde Tac Mahal'in ana binası da doğu mimarisinde altın oranın kullanıldığı bir başka anıttır. Binanın dış cephesinin temel hatlarını oluşturan dikdörtgenlerin hepsi altın orana sahiptir (Resim 6). Antik Mısır'ın devasa piramitleri, altın orana atfedilen muhteşem harikalardır. Firavunun bedenini ve ruhunu korumak ve otoritesini yüceltmek için bu devasa anıtlar inşa edilmiştir.

Mısır piramitleri, Mısırlıların matematik bilgisini ve Pisagor döneminden önce bunu piramitlere dahil etme konusundaki yoğun ilgilerini göstermektedir. Bunlar arasında Kefren'nin piramidi oldukça ilginçtir. "Kefren'nin piramidinin ölçümleri, yan yüzlerin eğim açısının 53°12′′ye eşit olduğunu ve bunun da dik üçgenin dik kenarlarının oranı: 4:3. Bu dik kenarların oranı, bu kenar oranlarına sahip iyi bilinen dik üçgene karşılık gelir. Üç, dört beş üçgeni; buna mükemmel, kutsal veya Mısır üçgeni denir" (Stakhov and Sluchenkova , 2001).

6. SONUÇ

İleri matematiksel kavramlar, paradoksal olarak, türetildikleri fiziksel dünyayla olan bazı ilişkilerini kaybederler. Yoğun bir şekilde incelenen karmaşık sayılar gerçek sayılardan türetilmiştir; ancak gerçek sayıların gerçek dünya deneyimine uymazlar. Matematik, tıpkı sanat gibi, özgür algının bir nesnesi olarak tek başına durur.

Sanat dış dünyaya gönderme yapmak zorunda olmadığından, matematik de merak ve hayal gücüyle motive olur. “Matematiğin büyük soruları- insanları ilk etapta matematiğe çeken türden sorular- uygulamalara yol açabilecekleri için değil, hayal gücünü büyüledikleri için büyük olarak adlandırılırlar. Merak ve zevk uyandırırlar. Güzel oldukları söylenebilir” Jones R, 2002). Sözgelimi, yüzün boyutları Altın Oran'a ne kadar yakınsa, kişi başkaları tarafından o kadar güzel algılanır. Mimarlar, Altın oranı yapılarına dahil ederken geometrik tasarım ve sanatsal güzellik arasındaki bağlantıyı keşfetmişlerdir. Modern zamanlarda, New York'taki Birleşmiş Milletler Genel Merkezi (üç Altın dikdörtgene sahip) ve Toronto'daki CN Kulesi gibi binaların tasarımlarında Altın oranlar bulunmaktadır. Altın oran sadece büyük bir matematik teorisi değildir; gerçek dünyada her zaman karşımıza çıkar. Aynı şekilde, grafik tasarımcı da Fibonacci dizisini tasarımı mükemmelleştirmek için genel bir kılavuz ve yaratıcı bir araç olarak kullanabilir. Tasarımcılar, fotoğraf veya görüntüleri Altın dikdörtgen veya Altın spiral şeklinde kırparak çekim kompozisyonu, logo tasarımı, mizanpaj vb. için Altın oranı kullanabilirler. Günümüzde tasarımcılar, Atrise Golden section, Golden calipers, Golden ratio app, Golden ratio typography app, Phi calculator gibi Altın oranı çalışmalarına dahil etmelerine yardımcı olacak en iyi araçlar olarak kullanabilecekleri modern teknik uygulamalarla ayrıcalıklıdır. İnsanlar Altın oranın muhtemelen aşkın dünyanın arketipik dokusundan alınan herhangi bir gizemli güzellik gücüne sahip olmadığını iddia edebilir. Ancak bu her yerde bulunan desenin doğal denge ve görsel uyum hissi uyandıran estetik açıdan çekici bazı özelliklere sahip olması daha muhtemeldir.

KAYNAKÇA

Altın oran - Vikipedi https://tr.wikipedia.org/wiki/Alt%C4%B1n_oran

Altın üçgen - Vikipedi https://tr.wikipedia.org/wiki/Alt%C4%B1n_%C3%BC%C3%A7gen

Aslaner, R., Bakan S. (2020). Altın Üçgen ve Düzgün Beşgen Üzerinde Oluşan Altın Üçgenlerin Bir Dinamik Geometri Yazılımı ile Araştırılması. *Journal of Institute of Science and Technology*, *36*(2). 169-169

Choi, J., Atena, A., & Tekalign, W. (2023). The Most Irrational Number that Shows up Everywhere: The Golden Ratio. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, *11*(4), 1185-1193.

Frayling C, Frayling H and Van Der Meer R (1992), *The Art Pack*. New York: Alfred A. Knopf publishing, USA.

Ghorbani, H. (2021). Golden Ratio: The Mathematics of Beauty. *Mathematics Interdisciplinary Research*, *6*(2), 159-170.

Jones R (2002), Stern Perfection; Mathematics as a Fine Art, Catalyst Special Edition, Brown University, Retrieved from /www. People. Carleton.edu/~rfjones

Özkan Kılıç Ö., Kılıç M. (2017). "Mathematics & Aesthetics & Design=Architecture", In Prof. Hasan Arapgirlioğlu, Prof. Robert L. Elliott editors, *Researches on science and art in 21st century Turkey*, Ankara, Gece Publishing, 43-49.

Stakhov, A., & Sluchenkova, A. (2001). Museum of Harmony and the Golden Section. *Mathematical connections in nature, science, and art. http://www. goldenmuseum. com*.

Thapa, G. B., & Thapa, R. (2018). The relation of golden ratio, mathematics and aesthetics. *Journal of the Institute of Engineering*, *14*(1), 188-199.